PART3　累乗根の大小，指数関数の最大・最小

3 [1] $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ の大小を比較せよ。

[2] 関数 $y=4^x-2^{x+3}+4$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

Point Pickup

[1] 底が異なる累乗根の大小は，$a>0$，$b>0$，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

であることを利用するとよい。

[2] $2^x=t$ とおくと，与えられた関数は t の2次関数となる。t のとり得る値の範囲に注意。

第11講　PART3　確認問題

1　$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[6]{3}$，$\sqrt[7]{7}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{ア} < \boxed{イ} < \boxed{ウ}$

①　$\sqrt[3]{2}$　　②　$\sqrt[6]{3}$　　③　$\sqrt[7]{7}$

2　関数 $y=\dfrac{1}{2}\cdot16^x-2\cdot4^x+3$ $\left(-3\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$x=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき　最大値 $\boxed{カキ}$

$x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のとき　最小値 $\boxed{コ}$

PART3　累乗根の大小，指数関数の最大・最小

3　[1]　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ の大小を比較せよ。

[2]　関数 $y=4^x-2^{x+3}+4$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

[1]　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}$

$2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ をそれぞれ 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$$

よって　$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$

$2^{\frac{1}{2}}>0$，$3^{\frac{1}{3}}>0$ より　$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{1}{2}}$ と $5^{\frac{1}{5}}$ をそれぞれ 10 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32,\quad \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$$

よって　$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}<\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

$5^{\frac{1}{5}}>0$，$2^{\frac{1}{2}}>0$ より　$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$

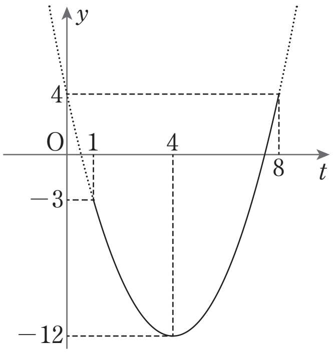
以上より　$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$　すなわち　$\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

[2]　$y=4^x-2^{x+3}+4=\left(2^x\right)^2-8\cdot 2^x+4$

$2^x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 3$ より　$1\leqq t\leqq 8$

このとき，y の式は

$$y=t^2-8t+4=(t-4)^2-12$$



$t=8$，つまり $2^x=8$ より

$x=3$ のとき　最大値 4

$t=4$，つまり $2^x=4$ より

$x=2$ のとき　最小値 -12

第 11 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：①，ウ：③

[解説]

$$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}},\ \sqrt[7]{7}=7^{\frac{1}{7}}$$

$2^{\frac{1}{3}}$ と$3^{\frac{1}{6}}$をそれぞれ 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6=2^2=4,\ \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6=3$$

よって　$\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6<\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$ [A]

$3^{\frac{1}{6}}>0$，$2^{\frac{1}{3}}>0$ より　$3^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{1}{3}}$ と$7^{\frac{1}{7}}$をそれぞれ 21 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{21}=2^7=128,\ \left(7^{\frac{1}{7}}\right)^{21}=7^3=343$$

よって　$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{21}<\left(7^{\frac{1}{7}}\right)^{21}$ [A]

$2^{\frac{1}{3}}>0$，$7^{\frac{1}{7}}>0$ より　$2^{\frac{1}{3}}<7^{\frac{1}{7}}$

以上より　$3^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{3}}<7^{\frac{1}{7}}$

すなわち　$\boldsymbol{\sqrt[6]{3}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[7]{7}}$

> [A]　底が異なる累乗根の大小を比較するときは，指数を揃えて，次のことを利用するとよい。
> $a>0$，$b>0$，n が自然数のとき
> $a<b \Longleftrightarrow a^n<b^n$

2

[正解] エ：3，オ：2，カキ：19，ク：1，ケ：2，
コ：1

[解説]

$$y=\frac{1}{2}\cdot 16^x-2\cdot 4^x+3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(4^x)^2-2\cdot 4^x+3$$ [B]

[B]　底を揃える。

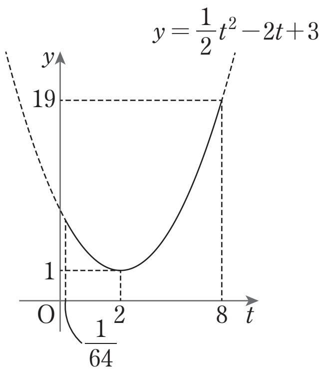
$4^x=t$ とおくと，$-3 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ より　$4^{-3} \leqq t \leqq 4^{\frac{3}{2}}$

すなわち　$\frac{1}{4^3} \leqq t \leqq (2^2)^{\frac{3}{2}}$　　ゆえに　$\frac{1}{64} \leqq t \leqq 8$

このとき，y の式は

$$y=\frac{1}{2}t^2-2t+3=\frac{1}{2}(t-2)^2+1$$ [C]

[C]　t に置き換えて，t の 2 次関数として最大値，最小値を求める。t のとりうる値の範囲に注意。



よって，$\frac{1}{64} \leqq t \leqq 8$ の範囲において，

y は $t=8$ のとき最大，$t=2$ のとき最小となる。

$t=8$ のとき，$4^x=8$ より　$x=\frac{3}{2}$

$t=2$ のとき，$4^x=2$ より

$$2^{2x}=2^1 \qquad x=\frac{1}{2}$$ [D]

[D]　$a>0$，$a \neq 1$のとき
$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

したがって

$x=\frac{3}{2}$ のとき　**最大値 19**

$x=\frac{1}{2}$ のとき　**最小値 1**